Universidad Rey Juan Carlos	Física Aplicada a la Ingeniería	Hoja 2
	Ingeniería Organización Industrial	Trabajo y Energía

1. Calcule la energía potencial correspondiente a cada una de las siguiente fuerzas.
   - movimiento armónico simple unidimensional, $\vec{F} = -\alpha x\hat{i}$.
   - fuerza atractiva cuadrática inversa, $\vec{F} = -K/x^2\hat{i}$.
2. Una partícula de masa m es lanzada desde el punto $x = a$ con una velocidad u y se mueve a lo largo del eje X, bajo la acción del campo de fuerza $\vec{F} = -m\omega^2 x\hat{i}$. Calcule la máxima distancia al origen y la máxima velocidad que puede alcanzar la partícula.
   Sol: $x_{max} = \sqrt{u^2/\omega^2 + a^2}; v_{max} = \sqrt{u^2 + \omega^2 a^2}$
3. Una partícula se mueve bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = 20\hat{i} - 30\hat{j} + 15\hat{k}$ según la línea recta que va del punto A (2,7,-3) al punto B (5,-3,-6). Halle el trabajo realizado.**Sol:**315 J.
4. Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de un campo de fuerza dado por $\vec{F} = A(sen\omega t\hat{i} + cos\omega t\hat{j})$. Si la partícula está inicialmente en reposo en el origen, probar que el trabajo realizado sobre la partícula viene dado por $(A^2/m\omega^2)(1-cos\omega t)$. Demuestre que la potencia instantánea aplicada a la partícula es $(A^2/m\omega)sen\omega t$.
5. Una partícula de masa 2 se mueve a lo largo de la parte positiva del eje X bajo la acción del campo de fuerza $\vec{F} = (4/x^2 - 1)\hat{i}$. Si inicialmente la partícula está en reposo en el punto $x = 4$. Calcule los extremos y el periodo del movimiento.**Sol:** $x_1 = 1\ m x_2 = 4\ m$
6. Compruebe si el campo de fuerza $\vec{F} = (y^2 - 2xyz^3)\hat{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\hat{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\hat{k}$ es conservativo o no. En caso afirmativo, halle el potencial V asociado. **Sol:**$V(x, y, z) = -xy^2 + x^2yz^3 - 3y - (3/2)z^4$
7. Una partícula se mueve en el campo de fuerza del problema anterior desde el punto (2,-1,2) hasta el punto (-1,3,-2). Calcule el trabajo realizado.**Sol:**W=-7 J
8. Halle el valor de las constantes a,b y c para que el campo de fuerzas definido por $\vec{F} = (x + 2y + az)\hat{i} + (bx - 3y - z)\hat{j} + (4x + cy + 2z)\hat{k}$ sea conservativo. ¿Cuál es el potencial asociado a dicho campo de fuerza?.**Sol:**$a = 4; b = 2; c = -1; V(x, y, z) = -2xy - x^2/2 - 4zx + 3/2y^2 + zy - z^2$
9. Halle el trabajo realizado para mover una partícula desde el punto (1,-1,2) hasta (2,3,-1) en un campo de fuerza cuyo potencial es $V = x^3 - y^3 + 2xy - y^2 + 4x$.**Sol:**W=11 J
10. Encontrar el trabajo necesario para mover una partícula en un campo de fuerza $\vec{F} = 3x^2\hat{i} + (2xz - y)\hat{j} + z\hat{k}$ a lo largo de:
    - la recta que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(2, 1, 3)$. **Sol:**W=16 J.
    - a lo largo de la curva en el espacio $x = 2t$, $y = t$, $z = 4t^2 - t$ desde $t = 0$ hasta $t = 1$.**Sol:**W=15.2 J.
11. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$ donde $\vec{F} = (x - 3y)\hat{i} + (y - 2x)\hat{j}$ y C es la curva cerrada en el plano xy, $x = 2cost$, $y = 3sent$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\pi$.**Sol:**6π.
12. Una partícula de masa 8 se mueve a lo largo del eje X bajo la acción del campo de fuerza cuya energía potencial viene dada por:

$$V = \frac{x(x-3)^2}{3}$$

    Demuestre que hay una única posición de equilibrio estable y calcule el periodo de oscilación bajo la aproximación a pequeñas oscilaciones.**Sol:**$x = 1\ inestable;\ x = 3\ estable; \tau = 4\pi$
13. Compruebe si los siguientes campos de fuerza son conservativos o no.
    - $\vec{F_1} = -2x\hat{i} - 2y\hat{j} - 2z\hat{k}$
    - $\vec{F_2} = y\hat{i} - x\hat{j}$

14. Una partícula de masa unitaria se mueve sobre el eje x por la acción de un campo de fuerza cuyo potencial es $V = 6x(x-2)$. Calcule sus puntos de equilibrio y su estabilidad.**Sol:**$x = 1$ *estable*.

15. Un cuerpo es lanzado desde la superficie de la Luna con una velocidad u en cualquier dirección. Demuestre que el cuerpo no puede escapar de la Luna si $u^2 < 2MG/R$, donde M y R son respectivamente la masa y el radio de la Luna. Considere que la única fuerza que está actuando sobre el cuerpo viene dada por la Ley de Gravitación Universal ($\vec{F} = -(mMG/r^2)\hat{r}$).

16. Una partícual de masa 4 kg se mueve bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = 4\hat{i} + 12t^2\hat{j}\ N$, donde t es el tiempo en segundos. La velocidad inicial de la partícula es $\vec{v_0} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}\ m/s^2$. Calcule el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ y el aumento de la energía cinética de la partícula durante el intervalo $0 \leq t \leq 1$.**Sol:**$W = \Delta E_c = 16J$.

17. Un cuerpo de masa unidad se mueve a lo largo del eje X, bajo la acción del campo

$$F = \frac{36}{x^3} - \frac{9}{x^2} \quad (x > 0)$$

Demuestre que el movimiento que describe el cuerpo o es una oscilación periódica entre dos extremos o un movimiento libre con un único extremo dependiendo del valor de su energía.

Inicialmente la partícula es impulsada desde el punto $x = 4$ con una velocidad de 0.5 m/s. Demuestre que el cuerpo oscilará entre dos puntos extremales y encuentre el periodo del movimiento.

El alumno deberá hacer uso de la siguiente integral:

$$\int_a^b \frac{xdx}{[(x-a)(b-x)]^{1/2}} = \frac{\pi(a+b)}{2}$$

Finalmente demuestre que hay un único punto de equilibrio y que este es estable. Calcule el periodo de oscilación para pequeñas perturbaciones entorno a dicho punto de equilibrio.
Sol:$x_1 = 3; x_2 = 6; \tau = 9\pi/\sqrt{2}\ s; \tau_{aprox} = 16\pi/3\ s$.

18. Una partícula de masa m es lanzada con una velocidad u desde el punto más bajo de una esfera hueca de radio b. Demuestre que, siempre y cuando la partícula permanezca en contacto con la superficie interna de la esfera, la velocidad de la partícula vendrá dada por:

$$v^2 = u^2 - 2gb(1 - cos\theta)$$

Obtenga el valor de la normal N en función del ángulo θ.

Para el caso $u = (3gb)^{1/2}$ hasta que ángulo subirá la partícula permaneciendo en contacto con la superficie interna de la esfera.
Sol:$N = mu^2/b + mg(3cos\theta - 2); \theta_{max} = 109°$.

19. Una bola de masa m puede deslizarse en un aro circular de radio a situado en un plano vertical. La bola está conectada al punto más alto del aro mediante un muelle sin masa y de longitud natural $3a/2$ y de constante de recuperación α. Determine la estabilidad de la posición de equilibrio situada en el punto más bajo del aro para los siguientes casos: $(a)\alpha = 2mg/a$ y $(b)\alpha = 5mg/a$.
Sol:a) Estable; b) Inestable.

20. Un alambre tiene forma de hélice $x = acos\theta\ y = asen\theta\ z = b\theta$, donde θ es un parámetro real y a, b son constantes positivas. El alambre está situado verticalmente según el eje Z. Una partícula P, que puede deslizar libremente a lo largo del alambre, se deja en reposo en el punto $(a, 0, 2\pi b)$. Calcule la velocidad con la que la partícula P llega al punto $(a, 0, 0)$ y el tiempo que le cuesta.
Sol:$\tau = \sqrt{\pi(a^2 + b^2)/gb}$.

21. Una partícula P de masa m se mueve a lo largo del eje X bajo la acción de un campo de fuerzas cuya energía potencial es $V = V_0(x/b)^4$, siendo V_0 y b constantes positivas. Demuestre que el movimiento de la partícula consiste en una oscilación periódica con centro en el origen. Demuestre además que cuando la oscilación tiene una amplitud a, el periodo τ viene dada por: (para llegar a esta expresión es necesario definir el parámetro $\xi = x/a$)

$$\tau = 2\sqrt{2}\left(\frac{m}{V_0}\right)^{(1/2)} \frac{b^2}{a} \int_0^1 \frac{d\xi}{(1-\xi^4)^{(1/2)}}$$

22. Un cable tiene forma de la parábola $z = x^2/2b$, $y = 0$, donde b es una constante positiva. El cable está fijo y orientado apuntando hacia la parte positiva del eje OZ. Una partícula P, que puede deslizar libremente sobre el hilo, está realizando oscilaciones según el eje X en el rango $-a \leq x \leq a$. Demuestre que el periodo τ de estas oscilaciones viene dada por:

$$\tau = \frac{4}{(gb)^{1/2}} \int_0^a \left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 - x^2}\right)^{1/2} dx$$

23. Un cable tiene forma de la cicloide $x = c(\theta + sin\theta),\ y = 0,\ z = c(1 - cos\theta)$, donde c es una constante positiva y el parámetro θ está en el rango $-\pi \leq x \leq +\pi$. El cable está fijado en el eje OZ apuntando verticalmente hacia arriba. Si una partícula puede deslizar libremente por el hilo, demuestre que la ecuación de conservación de la energía viene dada por:

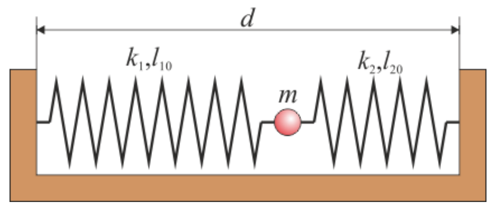
$$(1 + cos\theta)\dot{\theta}^2 + \frac{g}{c}(1 - cos\theta) = constante$$

Si definimos el parámetro $u = sin(\frac{1}{2}\theta)$. Demuestre que la ecuación del movimiento de la partícula en función de este parámetro u es:

$$\ddot{u} + \frac{g}{4c}u = 0 \qquad (1)$$

En este caso deduzca que la partícula realiza oscilaciones de periodo $4\pi(c/g)^{1/2}$ (es independiente de la amplitud!!)

24. Una masa $m = 1{,}00\,\mathrm{kg}$ se encuentra atada a dos paredes separadas una distancia $d = 50\,\mathrm{cm}$ mediante dos resortes, uno (el de la izquierda) con constante de recuperación $k_1 = 64\,\mathrm{N/m}$ y longitud natural $l_{10} = 16\,\mathrm{cm}$, y el otro con constante $k_2 = 36\,\mathrm{N/m}$ y longitud natural $l_{20} = 9\,\mathrm{cm}$. El conjunto se encuentra sobre una superficie horizontal sin rozamiento, de forma que el peso puede ser ignorado.

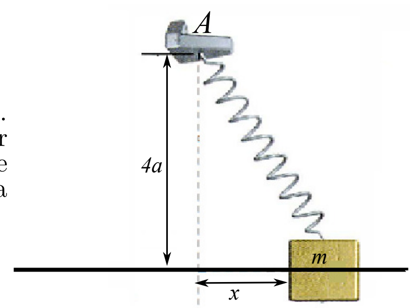


- determine la posición de equilibrio del sistema y su estabilidad.

Si estando en la posición de equilibrio se comunica una velocidad de 0,20 m/s a la masa hacia la derecha, calcule

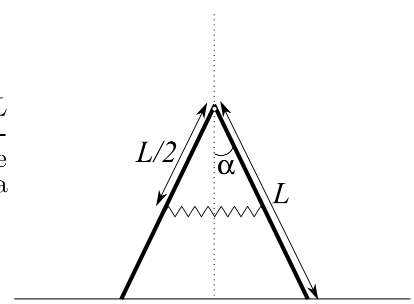
- los límites de oscilación de la partícula.
- el periodo para pequeñas oscilaciones.

25. Una partícula de masa m puede deslizar libremente sobre un hilo horizontal. La partícula está conectada a un punto fijo A, situado a una distancia $4a$ por encima del hilo, mediante un muelle elástico de longitud natural $3a$ y constante recuperadora α. Encuentre el periodo para pequeñas aproximaciones en torna a su punto de equilibrio.



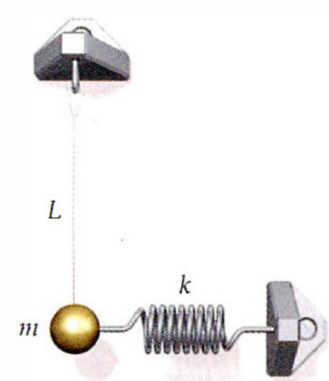
Sol: $T = 4\pi\sqrt{m/\alpha}$.

26. Una escalera está construida mediante dos varillas de masa M y longitud L unidas mediante un muelle situado a mitad de altura de ambas varillas. Si consideramos que la longitud natural del muelle es desprecialbe y que la constante de recuperación vale k (vea la figura) calcule la posición de equilibrio α de la escalera.



Sol: $cos\theta = Mg/kL$.

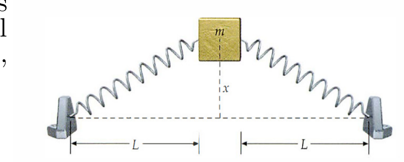
27. Sea un péndulo formado por un hilo de longitud L y masa despreciable y por una bola de masa m. La bola de este péndulo está unida a un muelle con una constante de recuperación k, y que en el momento que se muestra en la figura tiene su longitud natural. A continuación tiramos de la bola de modo que el hilo describe un ángulo pequeño θ con la vertical y lo soltamos. Calcule:



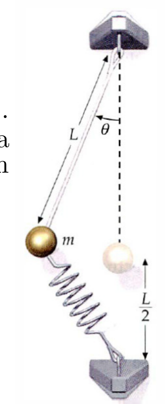
- la velocidad con la que el péndulo volverá a su posicípn de equilibrio.

Ayuda: Si θ se mide en radianes, $sin\theta \approx tan\theta \approx \theta$ y $cos\theta \approx 1$

28. Sobre una mesa se situa un bloque de madera de masa M conectado a dos muelles sin masa tal y como se ve en la figura. Cada muelle tiene una longitud natural L y una constante de recuperación k. Si desplazamos el bloque una distancia x, calcule:



- la energía potencial acumulada por el sistema en función de x.
- calcular el punto de equilibrio del sistema y su estabilidad.



29. Un péndulo de longitud L y masa M está conectado al suelo mediante un muelle (ver figura). La longitud natural del muelle es $L/2$ y su constante de recuperación es k y la distancia entre el suelo y el techo es $1{,}5L$. Si el péndulo es separado de su posición de equilibrio un ángulo θ_0 respecto de la vertical, calcule:

- la velocidad del péndulo cuando vuelva a pasar por su posición de equilibrio.
- demuestre que $\theta = 0$ es un punto de equilibrio del sistema.